Дәреженің қасиеттері:

1°. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

2°. $a^n : a^k = a^{n-k}$

3°. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4°. $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$

5°. $a^0 = 1$

6°. $(a^n)^k = a^{nk}$

Қысқаша көбейту формулалары:

1. $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$
5. $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ немесе $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
7. $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$ немесе $a^3 – b^3 – 3ab(a – b)$

Квадрат теңдеу:

$a^2x + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D = 0$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$D < 0$ *шешімі жоқ*

$a(x – x_1)(x – x_2)$

Периодты бөлшек:

Мұндағы **9** саны жақшаның ішіндегі санға байланысты қойылады. Мысалы жақшаның ішінде екі сан болса екі **9** саны жазылады. **0** саны үтір мен жақшаның арасындағы санға байланысты қойылады. Мысалы: жақша мен үтірдің ортасында екі сан болса екі **0** саны жазылады. Егер сан жоқ болса жазылмайды.

$$a,bc(de) = \frac{abcde - abc}{9900}$$

ПРОГРЕССИЯ:

Арифметикалық прогрессия:

a_1 – арифметикалық прогрессияның бірінші мүшесі;
d – арифметикалық прогрессияның айырмасы;
a_n – арифметикалық прогрессияның n-ші мүшесі;
S_n – алғашқы n мүшелерінің қосындысы;

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$
$$d = a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1}$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$
$$a_n + a_k = a_p + a_q \quad n + k = p + q$$

Геометриялық прогрессия:

b_1 – геометриялық прогрессияның бірінші мүшесі;
q – геометриялық прогрессияның еселігі;
b_n – геометриялық прогрессияның n-ші мүшесі;
S_n – алғашқы n мүшелерінің қосындысы;
S – шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы;

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$
$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$
$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad q > 1$$
$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \quad q < 1$$
$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$
$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$
$$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$
$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$
$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

Тригонометриялық функциялардың әр ширектегі таңбасы

	I ширек	*II ширек*	*III ширек*	*IV ширек*
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
tgx	+	-	+	-
ctgx	+	-	+	-

Функция	***0°***	***30°***	***45°***	***60°***	***90°***	***180°***	***270°***	***360°***
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Келтіру формулалары

Функция	*Бұрыштары*								
	- α	*90° + α*	*90° - α*	*180°+α*	*180°- α*	*270°+α*	*270°-α*	*360°+α*	*360°-α*
	- α	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sinx	- sinx	cosx	cosx	- sinx	sinx	- cos	- cos	sinx	- sinx
cosx	cosx	- sinx	sinx	- cos	- cos	sinx	- sinx	cosx	cosx
tgx	- tgx	- ctgx	ctgx	tgx	- tgx	- ctgx	ctgx	tgx	- tgx
ctgx	- ctgx	- tgx	tgx	ctgx	- ctgx	- tgx	tgx	ctgx	- ctgx

Қосу формулалары:

$$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$$

$$sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta-cos\alpha sin\beta$$

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$$

$$cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{ctg\cdot ctg\beta-1}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{ctg\alpha-ctg\beta}{ctg\cdot ctg\beta+1}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg+ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{1+tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg-ctg\beta}$$

Көбейтіндіні қосындыға түрлендіру формулалары:

$$sin\alpha\cdot sin\beta=\frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$cos\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$sin\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\big(sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$ctg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

$$cos\alpha\cdot cos2\alpha=\frac{sin4\alpha}{2^2\cdot sin\alpha}$$

$$cos\alpha\cdot cos2\alpha\cdot cos4\alpha=\frac{sin8\alpha}{8sin\alpha}$$

Қос бұрыштың формулалары:

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

$$cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$$

$$cos2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$$

$$sin2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha - 1}$$

$$ctg2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{2tg\alpha} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

Үш еселенген бұрыштың формуласы:

$$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$$

$$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

$$ctg3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\,\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$$

Кейбір қосындылар:

$$(sin\alpha + cos\alpha)^2 = 1 + sin2\alpha$$

$$(sin\alpha - cos\alpha)^2 = 1 - sin2\alpha$$

$$cos^4\alpha + sin^4\alpha = \frac{1 + cos^2 2\alpha}{2}$$

$$cos^4\alpha + sin^4\alpha = \frac{2 - sin^2 2\alpha}{2}$$

$$cos^4\alpha + sin^4\alpha = \frac{3 + cos4\alpha}{4}$$

$$cos^6\alpha + sin^6\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}cos4\alpha$$

$$cos^6\alpha + sin^6\alpha = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}cos^2 2\alpha$$

$$cos^6\alpha + sin^6\alpha = \frac{15}{16}cos2\alpha + \frac{cos6\alpha}{16}$$

Қосындыны көбейтіндіге түрлендіру формулалары:

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

$$cos\alpha + sin\alpha = \sqrt{2}cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$cos\alpha - sin\alpha = -\sqrt{2}sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$cos\alpha - sin\alpha = \sqrt{2}cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$sin\alpha - cos\alpha = \sqrt{2}sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$sin\alpha - cos\alpha = -\sqrt{2}cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{sin(\beta-\alpha)}{sin\alpha \cdot sin\beta}$$

$$tg\alpha + ctg\beta = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot sin\beta}$$

$$tg\alpha - ctg\beta = -\frac{cos(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot sin\beta}$$

$$tg\alpha + ctg\alpha = \frac{2}{sin2\alpha}$$

$$tg\alpha - ctg\alpha = -2ctg2\alpha$$

Дәрежені төмендету:

$$sin^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{2}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}$$
$$tg^2\alpha = \frac{1 - cos2\alpha}{1 + cos2\alpha}$$
$$ctg^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{1 - cos2\alpha}$$
$$sin^3\alpha = \frac{3sin\alpha - sin3\alpha}{4}$$
$$cos^3\alpha = \frac{3cos\alpha + cos3\alpha}{4}$$
$$sin^4\alpha = \frac{1}{8}(cos4\alpha - 4cos2\alpha + 3)$$
$$cos^4\alpha = \frac{1}{8}(cos4\alpha + 4cos2\alpha + 3)$$

Жарты бұрыштың формулалары:

$$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$$
$$cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$$
$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{1 - cos\alpha}}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{sin\alpha}$$
$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{sin\alpha}$$

Кері тригонометриялық функциялар:

$$sin(arcsinx) = x$$
$$sin(arccosx) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$sin(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$sin(2arcsinx) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$
$$sin(2arccosx) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$
$$sin(2arctgx) = \frac{2x}{1 + x^2}$$
$$sin(2arcctgx) = \frac{2x}{1 + x^2}$$
$$cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$cos(arccosx) = x$$
$$cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$cos(2arcsinx) = 1 - 2x^2$$
$$cos(2arccosx) = 2x^2 - 1$$
$$cos(2arctgx) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$
$$cos(2arcctgx) = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}$$

$$tg(arcsinx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$tg(arccosx) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$tg(arctgx) = x$$
$$tg(arcctgx) = \frac{1}{x}$$
$$tg(arcctgx) = \frac{1}{x}$$
$$tg(arcctgx) = \frac{x^2-1}{2x}$$
$$tg(2arcsinx) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$
$$tg(2arccosx) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$$
$$tg(2arcctgx) = \frac{2x}{x^2-1}$$
$$ctg(arcsinx) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$ctg(arccosx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$ctg(arctgx) = \frac{1}{x}$$
$$ctg(arcctgx) = x$$
$$ctg(arcctgx) = \frac{1}{x}$$
$$ctg(arcctgx) = \frac{x^2-1}{2x}$$
$$ctg(2arcsinx) = \frac{1-2x^2}{2x\sqrt{1-x^2}}$$
$$ctg(2arccosx) = \frac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}$$
$$ctg(2arcctgx) = \frac{x^2-1}{2x}$$
$$ctg(2arcctgx) = \frac{1-x^2}{2x}$$

Тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдары:

$$sinx = a \quad -1 \le a \le 1$$
$$x = (-1)^n arcsina + \pi n, \qquad n \in Z, -\pi \le x \le \pi$$
$$sinx = -a \quad -1 \le a \le 1$$
$$x = (-1)^{n+1} arcsina + \pi n, \qquad n \in Z, -\pi \le x \le \pi$$
$$cosx = a \quad -1 \le a \le 1$$
$$x = \pm arccosa + 2\pi n, \qquad n \in Z, \qquad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$cosx = -a \quad -1 \le a \le 1$$
$$x = \pm(\pi - arcsina) + 2\pi n, \qquad n \in Z, \qquad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$tgx = a, \qquad a \in R$$
$$x = arctga + \pi n, n \in Z, \qquad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$tgx = -a, \qquad a \in R$$

$$x = -arctga + \pi n, n \in Z, \qquad \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$ctgx = a, \qquad a \in R$$

$$x = arcctga + \pi n, n \in Z, \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$ctgx = -a, \qquad a \in R$$

$$x = \pi - arcctga + \pi n, n \in Z, \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Тригонометриялық теңдеулердің дербес жағдайлары:

$$sinx = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$sinx = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$sinx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$tgx = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$tgx = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$tgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$cosx = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$cosx = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$cosx = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in Z$$

$$ctgx = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$ctgx = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$ctgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

Тригонометрия теңсіздігі:

$$sinx \geq a$$

$$x \in [\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k]$$

$$sinx \leq a$$

$$x \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi k;\ \arcsin a + 2\pi k]$$

$$cosx \geq a$$

$$x \in [-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k]$$

$$cosx \leq a$$

$$x \in [\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k]$$

$$tgx \geq a$$

$$x \in [\mathrm{arctg} a + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$$

$$tgx \leq a$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \mathrm{arctg} a + \pi k]$$

$$ctgx \geq a$$
$$x \in (\pi k;\ \mathrm{arcctg}a + \pi k]$$
$$ctgx \leq a$$
$$x \in [\mathrm{arctg}a + \pi k;\ \pi + \pi k)$$

ТУЫНДЫ:

$$c' = 0$$
$$(cx)' = c$$
$$x' = 1$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$(u^n)' = nu' \cdot u^{n-1}$$
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = -\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$$
$$(sinx)' = cosx$$
$$(cosx)' = -sinx$$
$$tgx = \frac{1}{cos^2x}$$
$$ctgx = -\frac{1}{sin^2x}$$
$$(sinu)' = u'cosu$$
$$(cosu)' = -u'sinu$$
$$(tgx)' = \frac{u'}{cos^2u}$$
$$(ctgx)' = -\frac{u^2}{sin^2u}$$

Күрделі туындылар:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$(sin^2 x)' = sin2x$$

$$(cos^2 x)' = -sin2x$$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Жанама теңдеуі:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Бұрыштық коэффициент:

$$\text{tg}x = f'(x_0)$$

Интеграл

Анықталмаған интеграл

1. $\int 0dx = c$, $c -$ *постоянная*;

2. $\int kdx = kx + c;$

3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;\ \alpha \neq -1;$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c;$

5. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c;$

10. $\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b) + c;$

11. $\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + c;$

12. $\int (kx+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$

15. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$

16. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

17. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + c;$

18. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + c;$

19. $\int e^x dx = e^x + c;$

20. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c;$

21. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c;$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c;$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c;$

24. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx +$;

$+(B - \frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$

25. $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$ *или* $\int udv = uv - \int vdu;$

Тригонометриялық функциялардың интегралы

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

3. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

4. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

5. $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C =$

$= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C;$

6. $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C =$

$= \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C;$

7. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}$

8. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{cosec} x dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

14. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

15. $\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C;$

16. $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C;$

17. $\int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C;$

18. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C;$

19. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$

20. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C;$

21. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C;$

22. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = tgx - x + C;$

23. $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$

24. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C = -\operatorname{cosec} x + C;$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \cos x + C;$

26. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int ctg^2 x dx = -ctgx - x + C;$

27. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln|tgx| + C;$

28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

29. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = tgx - ctgx + C;$

31. $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} +$

$+ \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; \quad (m^2 \neq n^2)$

32. $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} -$

$- \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C; \quad (m^2 \neq n^2)$

33. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} +$

$+ \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; \quad (m^2 \neq n^2)$

Интегралы от некоторых трансцендентных функций

1. $\int e^x dx = e^x + C;$

2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C;$

3. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C;$

4. $\int x^n \ln x dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C;$

5. $\int e^{ax} \ln x dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx;$

6. $\int x^m \ln^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x -$

$- \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x dx;$

7. $\int \frac{x^m dx}{\ln^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\ln^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{\ln^{n-1} x};$

8. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C;$

9. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C;$

10. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C;$

11. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$

12. $\int arctgx dx = xarctgx - \ln\sqrt{1+x^2} + C;$

13. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C;$

14. $\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C;$

15. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx;$

16. $\int a^{mx} x^n dx = \frac{a^{mx}x^n}{m\ln a} - \frac{n}{m\ln a}\int a^{mx}x^{n-1}dx;$

17. $\int \frac{a^x dx}{x^m} = -\frac{a^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{\ln a}{m-1}\int \frac{a^x dx}{x^{m-1}}.$

ЛОГАРИФМ:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a b^n = n \log_a b$$
$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$$
$$\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} = \log_a b$$
$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Логарифм теңдеуі:

$$\mathbf{\log_a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$
$$f(x) = a^x$$

$$\mathbf{\log_a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{\log_a} \mathbf{g}(\boldsymbol{x})$$
$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \mathrm{g}(x) > 0 \\ f(x) = \mathrm{g}(x) \end{cases}$$

Иррационал теңсіздіктерді шешу әдістері:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < \big(g(x)\big)^{2n+1}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > \big(g(x)\big)^{2n+1}$$

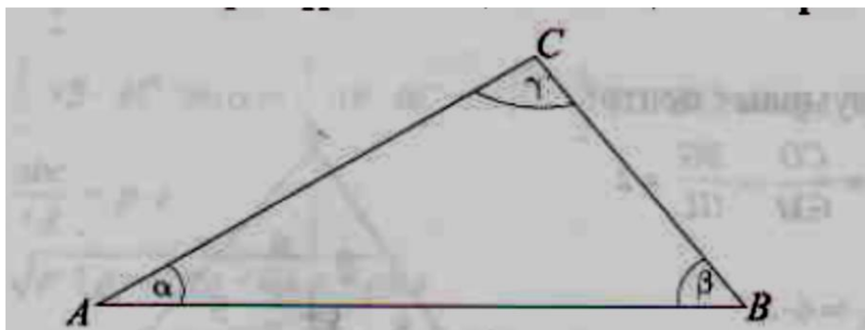
$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) < \big(g(x)\big)^{2n} \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > \big(g(x)\big)^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0 \\ \sqrt[n]{f(x)} < a \cdot g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ \sqrt[n]{f(x)} > a \cdot g(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

ГЕОМЕТРИЯ

ҮШБҰРЫШ



AB = c, BC = a, AC = b

Ішкі бұрыштарының қосындысы: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Сыртқы бұрыштарының қосындысы: : $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

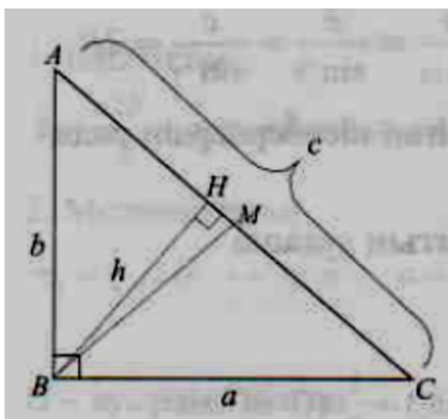
Косинустар теоремасы:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$$

Синустар теоремасы:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

Тік бұрышты үшбұрыш:



Пифагор теоремасы: $c^2 = a^2 + b^2$

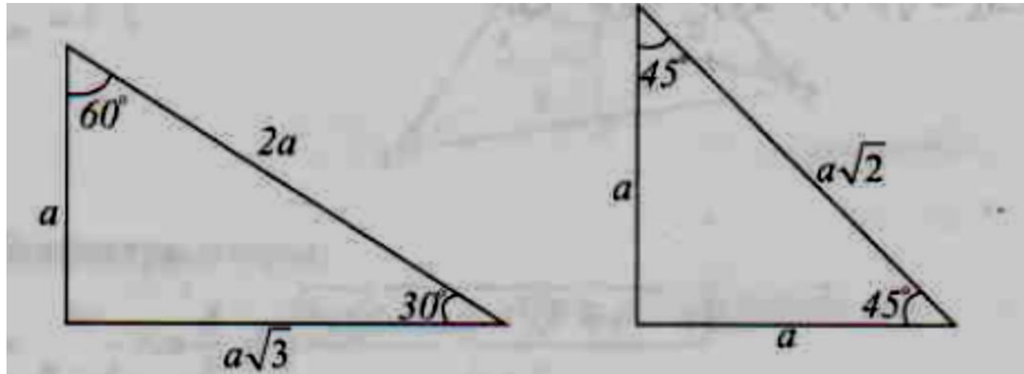
$$h = \frac{ab}{c} \quad h^2 = a_c b_c$$

$$BM = \frac{c}{2}$$

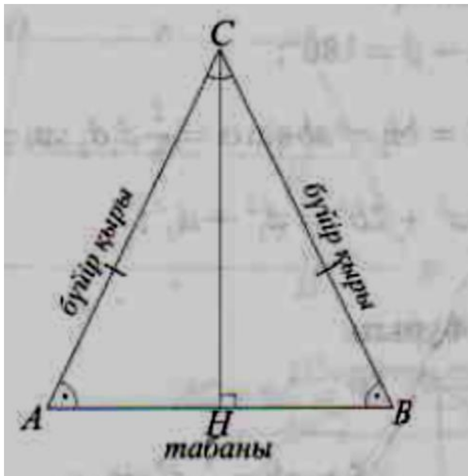
$$S_\Delta = \frac{ab}{2} = \frac{hc}{2}$$

Проэкциялары: $a^2 = a_c c$ $\quad b^2 = b_c c$

Дербес жағдайлары:

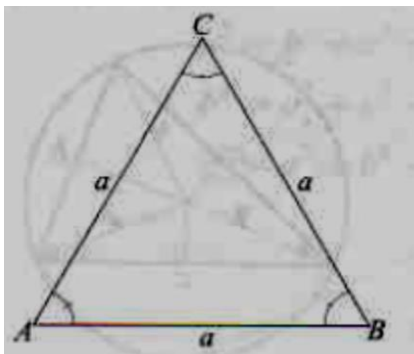


Тең бүйірлі үшбұрыш:



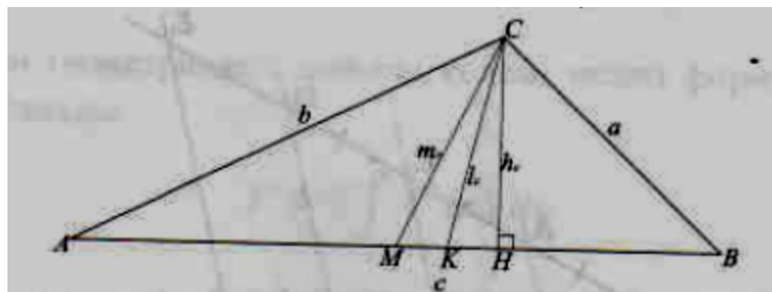
$$h_c = m_c = l_c$$
$$AC = BC$$
$$AH = HB$$
$$S_\Delta = \frac{AB \cdot CH}{2}$$

Тең қабырғалы үшбұрыш:



$$h = m = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$
$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Үшбұрыштың элементтері:



1) Биіктігі: ***h***

$$h_a = \frac{2S}{a} = a \cdot sin\angle A = b \cdot sin\angle B$$

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

2) Медианасы: ***m***

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}$$

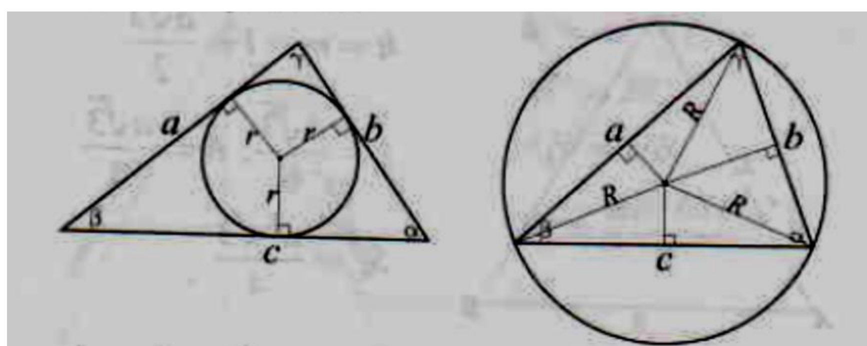
$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$$

3) Биссектрисасы: ***l***

$$l_a = \frac{bc}{b+c} cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{b+c}}$$

$$l_a = \sqrt{b \cdot c - a_b \cdot a_c}$$

Биссектрисалардың қиылысу нүктесі іштей сызылған шеңбердің центрі болады:



$$\frac{1}{l} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$R = \frac{abc}{4S_\Delta}$$

$$r = \frac{S_\Delta}{p}$$

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

Мұндағы: R, r – іштей және сырттай сызылған шеңбердің радиусы.

Кез келген үшбұрыштың ауданы:

$$S_{\Delta} = \frac{AC \cdot h}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot sin\alpha = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot sin\beta = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot sin\gamma$$

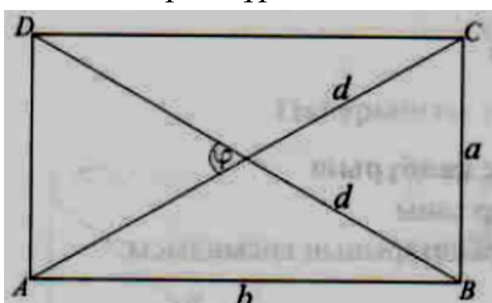
$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = p \cdot r$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

Мұндағы: $p = \frac{a+b+c}{2}$ жарты периметр

ТӨРТБҰРЫШТАР

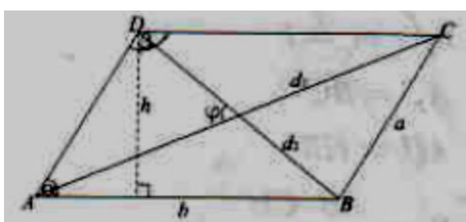
Тіктөрт бұрыш



$$P = 2a + 2b$$

$$S = a \cdot b = \frac{1}{2}d^2 sin\varphi$$

Параллелограм

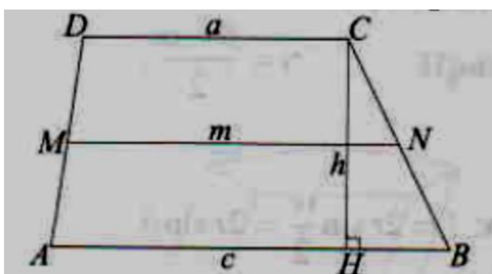


$$\alpha + \beta = 180°$$

$$S = b \cdot h = ab \cdot sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 sin\varphi$$

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Трапеция

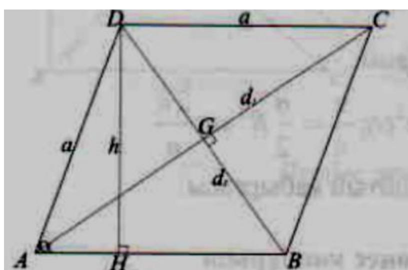


$$AM = MD, \quad CN = NB$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h$$

Ромб

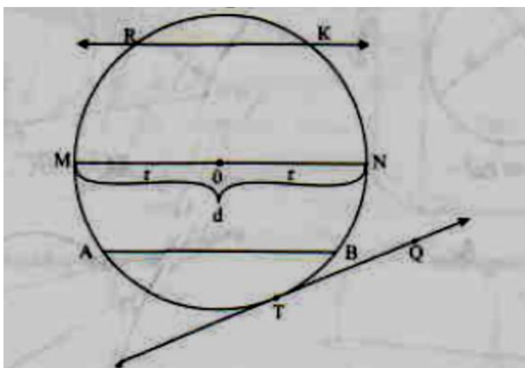


$$P = 4a$$

$$S = a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = a^2 sin\alpha$$

ДӨҢГЕЛЕК, ШЕҢБЕР



O – шеңбердің центрі

MN – шеңбердің диаметрі

AB – шеңбердің хордасы

d – шеңбер диаметрі

r – шеңбердің радиусы

RK – шеңбердің қиюшысы

TQ – шеңбердің жанамасы



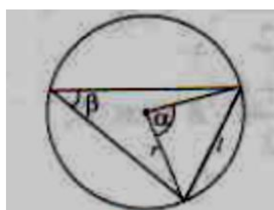
$\beta = \frac{\alpha}{2}$

$\gamma = \frac{\beta + \alpha}{2}$



$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$

$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$

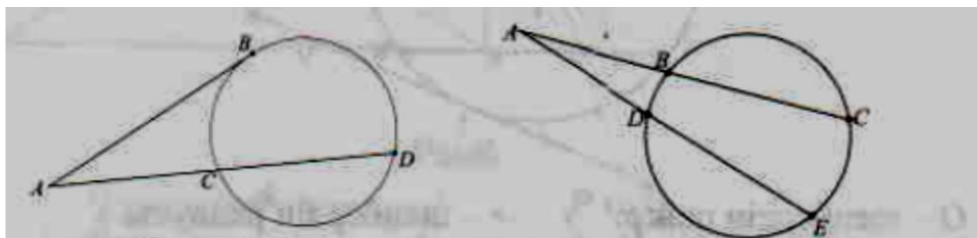


Хорда: $l = 2r \cdot sin\frac{\alpha}{2} = 2r \cdot sin\beta$



ab = *cd*

AC = *BC*



$AB^2 = AC \cdot AD$ $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

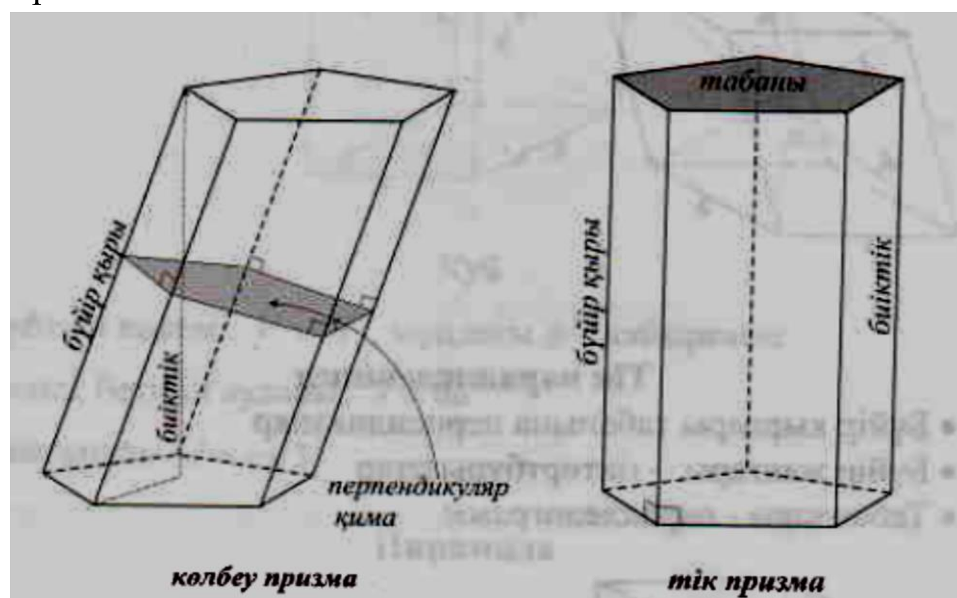
Дөңгелектің ауданы: $S = \pi r^2$
Шеңбердің ұзындығы: $C = 2\pi r$
Доғаның ұзындығы: $l = \frac{\pi r \alpha}{180°}$, α - центрлік бұрышы
Сектордың ауданы: $S_{\text{сектор}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$
Сегменттің ауданы: $S_{\text{сегмент}} = r^2 \left(\frac{\pi \alpha}{360°} - \frac{sin\alpha}{2}\right)$
Сақинаның ауданы: $S_{\text{сақина}} = \pi(R^2 - r^2)$

ДӨҢЕС КӨПБҰРЫШ
Айталық *n*– қабырғалар саны
1) Көпбұрыштардың ішкі бұрыштарының қосындысы: $(n-2) \cdot 180°$
2) Диагоналдарының қосындысы: $\frac{n(n-3)}{2}$
3) Дұрыс көпбұрыш ауданы:

$$S = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} = \frac{1}{4} n a^2 ctg\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} R^2 sin\frac{2\pi}{n}$$

Мұндағы *a*– дұрыс көпбұрыштың қабырғалары:

СТЕРЕОМЕТРИЯ
Призма

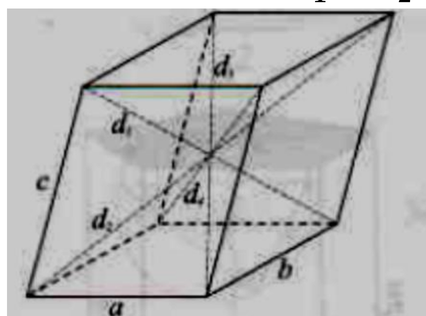


Призманың бетінің ауданы мен көлемі

	Көлбеу призма	*Тік призма*
Бүйір беті	$S_{б.б} = P_{қима} \cdot l$ Мұндағы: $P_{қима}$ - перпендикуляр қиманың ауданы. l– бүйір қыры	$S_{б.б} = P_{табан} \cdot H$ Мұндағы: $P_{табан}$ – табанының ауданы., H - биіктік
Толық беті	$S_{толық} = S_{б.б} + 2S_{табан}$	$S_{толық} = S_{б.б} + 2S_{табан}$
Көлемі	$V = S_{қима} \cdot l$ Мұндағы: $S_{қима}$ - перпендикуляр қиманың ауданы. l– бүйір қыры	$V = S_{табан} \cdot H$ Мұндағы: $S_{табан}$ – табанының ауданы., H - биіктік

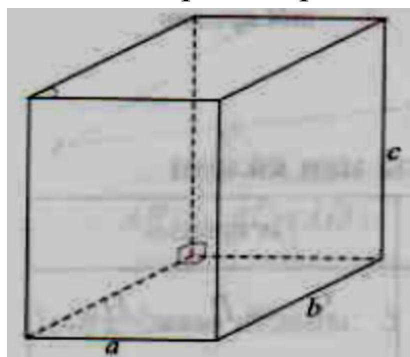
Параллелипипед

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$



Тік параллелипипед:

- Бүйір қырлары табанына перпендикуляр;
- Бүйір жақтары – төртбұрыштар;
- Табандары – параллелограмм;



Тікбұрышты параллелипипед

- Барлық диагональдары тең;
- $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- $S_{толық} = 2(ab + ac + bc)$
- $V = abc$

Куб:

Кубтың көлемі $V = a^3$, мұндағы a – қабырғасы.

Толық бетінің ауданы: $S = 6a^2$

Диагональ: $d = a\sqrt{3}$

ПИРАМИДА:

α – табанындағы екіжақты бұрыш

β – қырының табанына көлбеу бұрышы

γ – бүйір қырындағы екі жақты бұрыш

h – биіктік

l – бүйір қыры

m – апофема

r, R – табанына іштей және сырттай сызылған шеңберледің радиустары

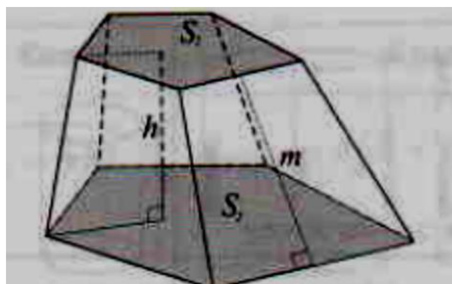
Кез келген пирамиданың бетінің ауданы мен көлемі

Толық беті: $S_{\text{толық}} = S_{\text{б.б}} + S_{\text{табан}}$

Көлемі: $V = \frac{1}{3} S_{\text{табан}} \cdot h$

Дұрыс пирамида үшін: $S_{\text{б.б}} = \frac{1}{2} P \cdot m,\ \ m$ - апофема.

Қиық пирамида



Қиық пирамиданың бетінің ауданы мен көлемі

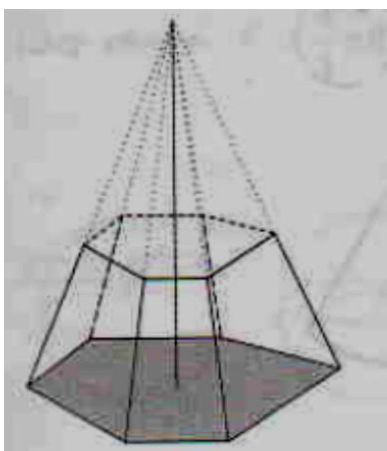
Дұрыс қиық пирамида үшін:

$S_{б.б} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot m,$ P_1 және $P_2 -$ табандарының периметрі, $m -$ апофема

Толық беті: $S_{толық} = S_{б.б} + S_1 + S_2$

Көлемі: $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$

Егер h_1– кіші пирамиданың, ал h_2– үлкен пирамиданың биіктігі болса, онда: $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$ ал $\frac{V_1}{V_1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$



ТЕТРАЭДР

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$r_m = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R_m = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$R_{шар} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$r_{шар} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$S_m = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

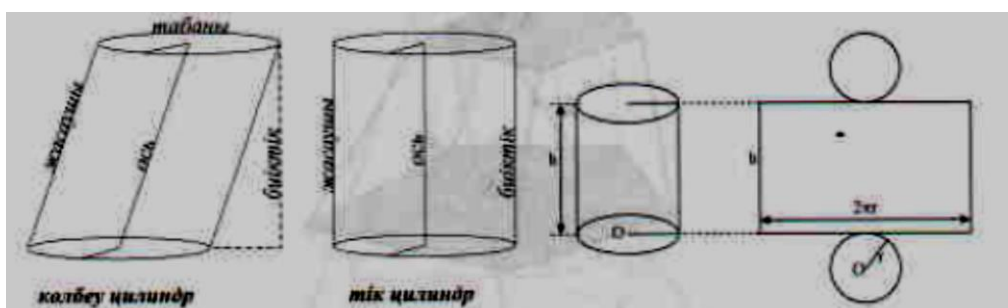
$$S_{т.б} = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}$$

$$S_{б.б} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ

Цилиндр

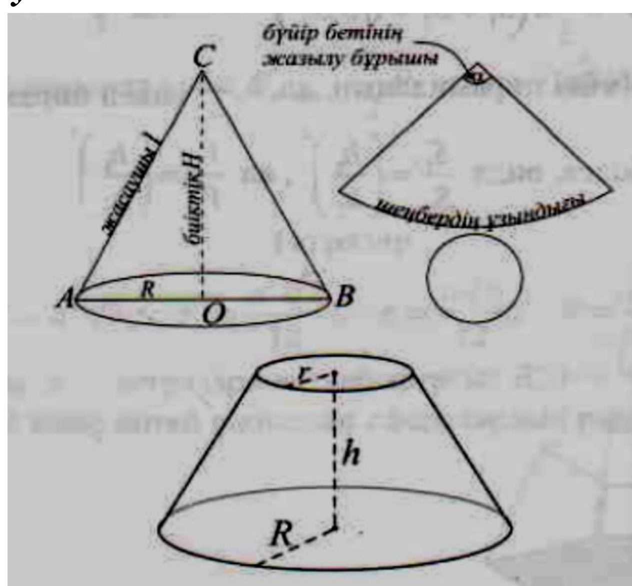


Бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б} = 2\pi rh$

Толық беті: $S_{толық} = S_{б.б} + 2S_{табан} = 2\pi r(h + r)$

Цилиндрдің көлемі: $V = S_{табан} \cdot h = \pi r^2 h$

Конус. Қиық конус.



Конустың бетінің ауданы мен көлемі

	Конус	***Қиық конус***
Бүйір беті	$S_{б.б} = \pi Rl$	$S_{б.б} = \pi(R + r)l$ *Мұнд: l-қиық конустың жасаушысы*
Толық беті	$S_{толық} = \pi R(R + l)$	$S_{толық} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$
Көлемі	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$ *Мұнд: S_1, S_2- табан ауданы.*

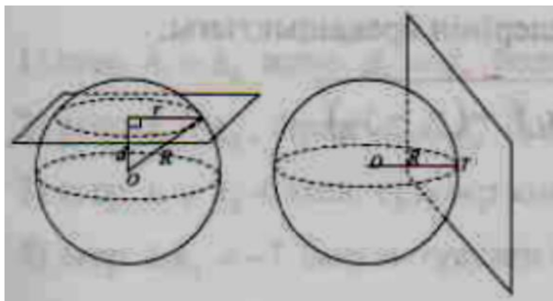
Конустың бүйір бетінің жазбасының бұрышы: $\alpha = \frac{2\pi R}{l}$

Шар. Сфера.

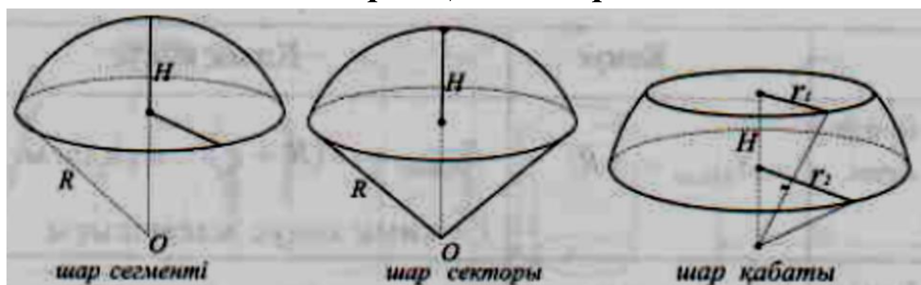
Егер қиманың жазықтығы шардың центрінен d қашықтықта орналасса, онда $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Сфера ауданы: $S = 4\pi R^2$

Шар көлемі: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Шардың бөліктері



Сегмент бітінің ауд: $S_{\text{сег}} = 2\pi RH$	Сектордың толық бетінің ауд: $S_{\text{тол}} = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right)$	Шар қабатының толық бетінің ауд: $S_{\text{б.б}} = 2\pi RH$
Сегмент көлемі: $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$	Сектордың көлемі: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$	Шар қабатының көлемі: $V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)H$

АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Жазықтықта

- $(x_1; y_1)$нүктесінен координаталар басына дейінгі арақашықтық:
$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
- $(x_1; y_1)$ және $(x_2; y_2)$ нүктелерінің арақашықтығы:
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- AB кесіндісінің ортасы болатын C нүктесінің координаталары, мұндағы $A(x_1; y_1)$ және $B(x_2; y_2)$
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
- AB кесіндісін λ қатынасында бөлетін D нүктесінің координаталары

$$\frac{AD}{BD}=\lambda \Rightarrow D\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$$

- беттеспейтін $(x_1;y_1)$ және $(x_2;y_2)$ нүктелер арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

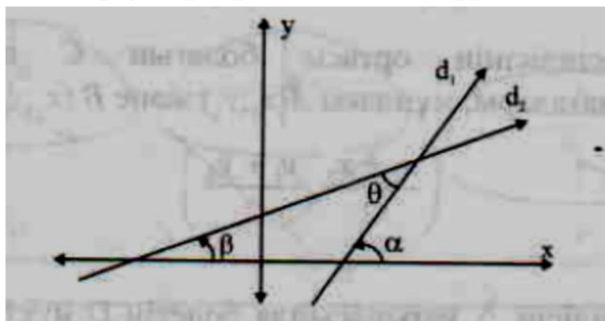
- $A(x_1;y_1)$ нүктесінен $ax+by+c=0$ түзуіне дейінгі арақашықтық:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Айталық $l_1: y=k_1x+d_1$ және $l_2: y=k_2x+d_2$ берілсін:

1) Егер $k_1=k_2$ және $d_1=d_2$ болса, түзулер беттеседі;
2) Егер $k_1=k_2$, бірақ $d_1\neq d_2$ болса, түзулер параллель;
3) Егер $k_1\neq k_2$ болса, түзулер қиылысады;
4) Егер $k_1k_2=-1$ болса, түзулер перпендикуляр;

Түзулер арасындағы бұрыш



Айталық θ d_1 және d_2 арасындағы бұрыш болсын:

$$\alpha=\theta+\beta \Rightarrow \theta=\alpha-\beta$$

$$m_{d_1}=\text{tg}\alpha, m_{d_2}=tg\beta$$

$$tg\theta=\frac{m_{d_1}-m_{d_2}}{1+m_{d_2}m_{d_2}}$$

Центрі $(x_0;y_0)$ нүктесіндегі шеңбердің теңдеу:

$$(x-x_2)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Кеңістікте

- $(x;y;z)$ нүктесінен бас нүктеге дейінгі арақашықтық:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- $(x_1;y_1;z_1)$ және $(x_2;y_2;z_2)$ нүктелерінің арақашықтығы:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

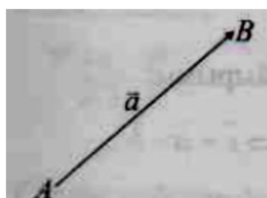
- AB кестесінің ортасы болатын M нүктесінің координаталары, мұндағы $A(x_1;y_1;z_1)$ және $B(x_2;y_2;z_2)$:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕРБА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

$\overline{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1)$, мұндағы $A(x_1;y_1)$ және $B(x_2;y_2)$, векторының ұзындығын табу формуласы:

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



1. Жазықтықтағы $\vec{a}(a_1;a_2)$ және $\vec{b}(b_1;b_2)$ векторларының ортогоналдық шарты: $a_1a_2+b_1b_2=0$
2. Векторлардың тең болу шарты: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow a_1=a_2;b_1=b_2$
3. $\vec{a}(a_1;a_2)$ және $\vec{b}(b_1;b_2)$ векторларының коллинеарлық шарты: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$

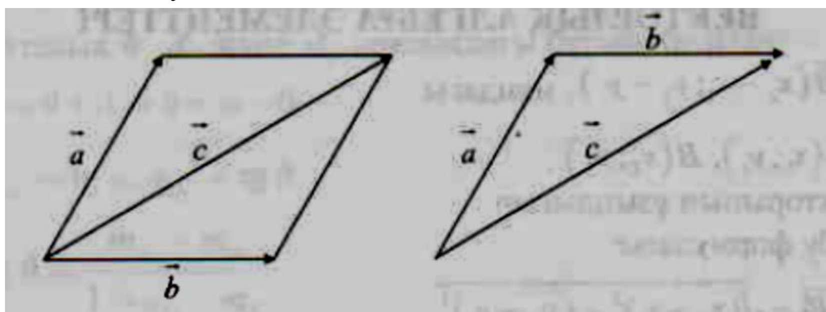
Векторларға амалдар қолдану

1) Қосу

$\vec{a}(a_1; a_2)$ және $\vec{b}(b_1; b_2)$ векторларының қосындысы:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

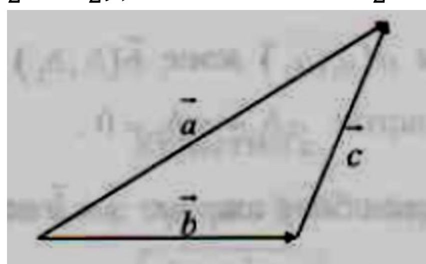
Сонымен қатар, векторларды *параллелограмм* немесе *үшбұрыш ережелерін* қолданып қосуға болады.



2) Алу

$\vec{a}(a_1; a_2)$ және $\vec{b}(b_1; b_2)$ векторларының айырымы:

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$, яғни $\vec{c} + \vec{b} = a_2 \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



3) Векторларды санға көбейту

$\vec{a}(a_1; a_2)$ векторының λ санына көбейтіндісі:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2)$$

а) егер $\lambda > 0$ болса, $\lambda\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ векторымен бағыттас;

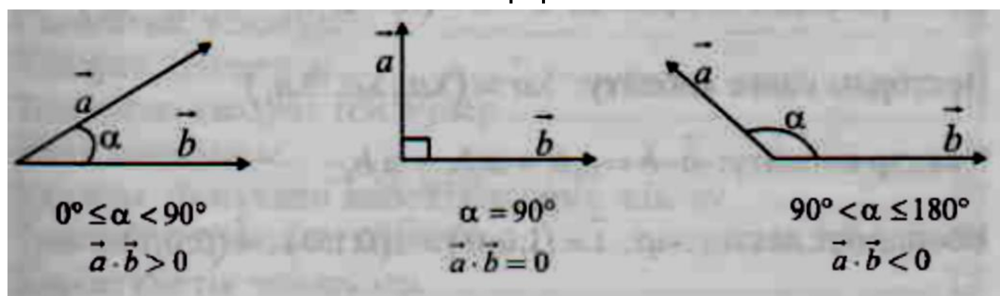
ә) егер $\lambda < 0$ болса, векторы векторына қарсы бағытта.

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

Векторлардың скаляр көбейтіндісі

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторының скаляр көбейтіндісі:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos\alpha$$



Скаляр көбейтудің қасиеттері:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

5) $(m\vec{a}) \cdot (n\vec{b}) = mn \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Кез келген нөлдік емес $\vec{a}(a_1; a_2)$ векторын бір ғана жолмен координат векторларға жіктеуге, яғни $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ түрінде жазуға болады.

Кеңістіктегі векторлар

$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, мұндағы $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, векторының ұзындығы келесі формуламен табылады.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Егер $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ және $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ болса, онда:

Коллинеарлық шарты: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$

Векторлардың қосындысы: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

Векторлардың айырмасы: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

Векторды санға көбейту: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$

Скаляр көбейту: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Координат векторлар: $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j}(0; 1; 0), \vec{k}(0; 0; 1)$

Параллеллограмның диагональдарының формуласы

$|\vec{а} + \vec{в}|^2 + |\vec{а} - \vec{в}|^2 = 2|\vec{а}|^2 + 2|\vec{в}|^2$